УДК 517.948

А. И. Зинченко

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗОЛИРОВАННОСТИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Для уравнений $x = F(x)$ с недифференцируемым оператором топологическими методами устанавливаются некоторые условия, при которых сохраняется изолированность решений при малых возмущениях оператора $F(x)$. При этом также сохраняется индекс этих решений.

При исследовании нелинейных уравнений широко применяются топологические методы, важнейшими понятиями которых является индекс

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1993. Вып. 5.

неподвижной точки (вращение поля $I - F$ на границе S шара $T(x_0, r)$ достаточно малого радиуса r, такого, что в $\overline{T}$ неподвижная точка x_0 оператора $F(x)$ единственна). Ниже используются эти понятия для исследования уравнений с негладкими операторами.

1. Пусть $F(x)$ — вполне непрерывный недифференцируемый по Фреше оператор, действующий в банаховом пространстве E.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) x_0 — неподвижная точка оператора $F(x)$, т. е. $F(x_0) = x_0$;

2) существует вполне непрерывный линейный оператор A, такой, что в некоторой окрестности U точки x_0 выполняется неравенство

$$\|F(x_0 + y) - F(x_0) - Ay\| \leqslant k\|y\|; \tag{1}$$

3) линейный оператор $I - A$ обратим и

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant a, \quad ak < 1, \quad a \neq 0. \tag{2}$$

Тогда x_0 является изолированной неподвижной точкой оператора $F(x)$. Индекс γ этой точки равен 1 или —1.

Доказательство. Из условия 3) теоремы следует, что

$$\|x\| = \|(I - A)^{-1}(x - Ax)\| \leqslant a\|x - Ax\|,$$

т. е.

$$\|x - Ax\| \geqslant \frac{1}{a}\|x\|. \tag{3}$$

Тогда, учитывая неравенство (1), получаем

$$\|F(x_0 + y) - (x_0 + y)\| = \|F(x_0 + y) - x_0 - Ay + Ay - y\| \geqslant$$

$$\geqslant \|Ay - y\| + \|F(x_0 + y) - F(x_0) - Ay\| \geqslant \left(\frac{1}{a} - k\right)\|y\| \tag{4}$$

для достаточно малых по норме y. А так как в силу условия (2) $\frac{1}{a} - k > 0$, то неподвижная точка x_0 оператора $F(x)$ изолирована.

Векторное поле $I - F$ на сфере $S(x_0, r) : \|x - x_0\| = r$ достаточно малого радиуса r гомотопно линейному векторному полю $I - A$. Действительно, неравенства (3) и (4) показывают, что поля $I - A$ и $I - F$ на $S(x_0, r)$ не имеют нулевых точек.

Функция

$$X(t, x) = t(x - F(x)) + (1 - t)(x - Ax - x_0 + Ax_0)$$

непрерывна на топологическом произведении $S(x_0, r) \times [0, 1] = S_0$ и, как легко показать, не имеет на S_0 нулевых векторов.

Таким образом, индекс неподвижной точки x_0 равен вращению γ линейного вполне непрерывного векторного поля $I - A$ на сфере $S(\Theta, 1)$ и утверждение теоремы 1 следует из теоремы Лере — Шаудера (см., например, [1]), согласно которой $\gamma = (-1)^{\beta}$, где β — сумма кратностей характеристических чисел оператора A, лежащих в интервале (0, 1).

Замечание 1. Существование и построение линейного оператора A в ряде случаев удобно устанавливать с помощью следующих рассуждений.

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 определен вполне непрерывный оператор $F_1(x)$, действующий в E и имеющий производную Фреше $F_1'(x_0)$. Пусть разность операторов $F(x) - F_1(x) = R(x)$ удовлетворяет в указанной окрестности условию Липшица

$$\|R(x) - R(y)\| \leqslant k_1\|x - y\|. \tag{5}$$

В этом случае роль оператора A может играть производная $F_1'(x_0)$ (при условии существования $(I - F_1'(x_0))^{-1} = \Gamma_0$ и оценок $\|\Gamma_0\| \leqslant a$, $ak_1 < 1$).

Действительно, оператор $F_1'(x_0)$ как производная Фреше вполне непрерывного оператора $F_1(x)$ вполне непрерывен (см., например, [1]). В силу определения производной Фреше, для $\varepsilon < \frac{1 - ak_1}{a}$ найдется такое число r, что для всех элементов y с $\|y\| \leqslant r$

$$\|F_1(x_0+y) - F_1(x_0) - F_1'(x_0)y\| \leqslant \varepsilon \|y\|.$$

И далее легко показывается, что условие (1) выполнено с $k = k_1 + \varepsilon$.

2. Будем в дальнейшем обозначать через $T = T(x_0, r)$ шар $\|x - x_0\| < r$, а $\overline{T} = T \cup S(x_0, r)$.

Известно, что малое возмущение вполне непрерывным оператором $G(x)$ векторного поля $I - F$ не изменяет его вращения, т. е. векторное поле

$$\Phi_\varepsilon = I - F - \varepsilon G,$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, имеет на сфере такое же вращение γ, что и поле $I - F$. Тога в шаре T, согласно принципу Лере — Шаудера, существуют нулевые точки поля Φ_ε, т. е. решение уравнения

$$x = F(x) + \varepsilon G(x).$$

Однако уже нельзя гарантировать единственности этого решения в T. Более того, может исчезнуть изолированность решения (например, когда x_0 есть решение уравнения $x = \lambda_0 F(x)$, соответствующее точке бифуркации λ_0).

Ниже приводятся некоторые условия, когда малые возмущения не нарушают изолированности решений уравнения $x = F(x)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и следующие условия:

1) вполне непрерывный оператор $G(x)$ определен в окрестности U точки x_0;

2) существуют вполне непрерывные линейные операторы A и B, такие, что для каждой точки y шара $\overline{T}: \|x - x_0\| \leqslant r$ достаточно малого радиуса r выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\|F(y+z) - F(y) - Az\| \leqslant k\|z\|, \\ &\|G(y+z) - G(y) - Bz\| \leqslant l\|z\|. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда существуют числа r_1 и ε_0, такие, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ операторы $F(x) + \varepsilon G(x)$ имеют в шаре $T(x_0, r_1)$ единственную неподвижную точку и их индексы равны γ.

Доказательство. В силу предположения полной непрерывности оператора $G(x)$ существует $M = \sup\limits_S \|G(x)\|$.

Так как на сфере $S(x_0, r)$ нет нулевых точек вполне непрерывного векторного поля $\Phi_0 = I - F$, найдется число $\alpha < \frac{1}{a}$, такое, что

$$\|x - F(x)\| \geqslant \alpha > 0, \quad x \in S(x_0, r)$$

(см., например, [1]). Обозначим $\|B\| = b$ и будем считать в дальнейшем, что

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{\alpha}{M}, \frac{1-ak}{al+ab}\right\}. \tag{7}$$

Функция

$$X(t, X) = x - F(x) - t\varepsilon G(x)$$

непрерывна на S_0;

$$X(0, x) = \Phi_0(x), \quad X(1, x) = \Phi_\varepsilon(x),$$

а так как на основании (7) $\varepsilon M < \alpha$, то

$$\|X(t, x)\| = \|x - F(x) - t\varepsilon G(x)\| \geqslant \|x - F(x)\| - t\varepsilon\|G(x)\| \geqslant \alpha - t\varepsilon M > 0;$$

$$x \in S(x_0, r_1), \quad t \in [0, 1].$$

Таким образом, векторные поля Φ_0 и Φ_ε гомотопны на $S(x_0, r)$. Их общее вращение $\gamma_0 = \gamma_\varepsilon$ на этой сфере равно индексу γ неподвижной точки x_0 оператора $F(x)$. На основании принципа Лере — Шаудера оператор $F(x) + \varepsilon G(x)$ имеет в $T(x_0, r_1)$ неподвижные точки. Пусть y — одна из них.

Покажем, что в этой точке выполнены все условия теоремы 1 для оператора $F(x) + \varepsilon G(x)$. Возьмем в качестве линейного оператора, фигурирующего в условии теоремы 1,

$$A_y = A + \varepsilon B.$$

Тогда в силу неравенства (6)

$$\|(F(y+z) + \varepsilon G(y+z)) - (F(y) + \varepsilon G(y)) - (A + \varepsilon B)z\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F(y+z) - F(y) - Az\| + \varepsilon \|G(y+z) - G(y) - Bz\| \leqslant (k + \varepsilon l)\|z\|$$

и условие (1) выполнено с постоянной $k_y = k + \varepsilon l$. По условию теоремы линейный оператор $(I - A)$ обратим, $\|(I - A)^{-1}\| \leqslant a$ и $\|\varepsilon B\| = \varepsilon b$, а в силу выбора числа ε (неравенство (7))

$$ab\varepsilon + al\varepsilon < 1 - ak,$$

откуда следует, что

$$b\varepsilon < \frac{1}{a}, \quad \|\varepsilon B\| = b\varepsilon < \frac{1}{a} = \frac{1}{\|(I-A)^{-1}\|}.$$

Но тогда, на основании теоремы Банаха (см., например, [2]), оператор $I - A_y$ обратим и

$$\|(I - A_y)^{-1}\| \leqslant \frac{a}{1 - \varepsilon ab} = a_y.$$

Наконец,

$$a_y k_y = \frac{a(k + \varepsilon l)}{1 - \varepsilon ab}$$

и в силу того же неравенства (7) $a_y k_y < 1$.

Таким образом, для неподвижной точки y оператора $F(x) + \varepsilon G(x)$ выполнены все условия теоремы 1, из которой следует, что y — изолированная неподвижная точка и ее индекс равняется вращению γ_C векторного поля $C = I - A_y$ на сфере $S(\Theta, 1)$.

Векторные поля $D = I - A$ и $C = I - A_y$ на $S(\Theta, 1)$ гомотопны. Действительно, функция $X(t, x) = x - Ax - t\varepsilon Bx$ непрерывна на $S(\Theta, 1) \times [0, 1]$. А так как

$$\|x\| \leqslant \|(I - A)^{-1}\| \|x - Ax\| \leqslant a\|x - Ax\|,$$

то

$$\|X(t, x)\| \geqslant \|x - Ax\| - t\varepsilon\|Bx\| \geqslant \frac{1}{a}\|x\| - t\varepsilon b\|x\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{a} - \varepsilon b = m; \quad x \in S(\Theta, 1),$$

где $m = \dfrac{1 - \varepsilon ab}{a} > 0$ по выбору числа ε. Следовательно, вращение полей C и D на единичной сфере $S(\Theta, 1)$ совпадают: $\gamma_C = \gamma_D$. Учитывая доказанное выше и принятые обозначения, имеем

$$\gamma_0 = \gamma_D = \gamma_C = \gamma = \gamma_\varepsilon. \tag{8}$$

Неподвижные точки вполне непрерывного оператора $F(x) + \varepsilon G(x)$ образуют в $T(x_0, r_1)$ замкнутое компактное множество L. Поскольку все они изолированы, то их число в L конечно: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. (В противном случае можно было бы извлечь бесконечную последовательность таких точек, имеющую в T предельную точку x^*, которая была бы уже неизолированной неподвижной точкой рассматриваемого оператора.)

Индексы всех этих точек равны $\nu_{y_k} = \gamma_D = \gamma$. Вращение γ_ε поля $\Phi_\varepsilon = I - F - \varepsilon G$ на сфере $S(x_0, r_1)$, как известно, равно сумме индексов нулевых точек этого поля, лежащих в $T(x_0, r_1)$, т. е. $\gamma_\varepsilon = n\gamma$.

Но тогда в силу (8) $n\gamma = \gamma$ и $n = 1$. Теорема доказана.

Замечание 2. В теореме 2 линейные операторы A_y могут быть взяты зависящими от y. Доказательство фактически не изменится, если эта зависимость будет непрерывной.

Такая ситуация будет реализована, если предположить существование в окрестности U точки x_0 дифференцируемых по Фреше операторов $F_1(x)$

и $G_1(x)$, таких, что разности $F(x) - F_1(x)$, $G(x) - G_1(x)$ удовлетворяют на U условиям Липшица с постоянными k и k_1 соответственно, а производные $F_1'(x)$ и $G_1'(x)$ непрерывны в точке x_0, и принять $A_y = F_1'(y) + \varepsilon G_1'(y)$.

Замечание 3. Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое число $(\delta < r)$. Тогда, повторяя доказательство теоремы 2, можно указать такое число ε_0, что в шаре $T(x_0, \delta)$ лежит единственная неподвижная точка $y(\varepsilon)$ оператора $F(x) + \varepsilon G(x)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$, т. е.

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow \| y(\varepsilon) - x_0 \| < \delta.$$

Это означает, что $y(\varepsilon) \to x_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следствие. Пусть x_0 — изолированное решение уравнения

$$x = \lambda_0 H(x),$$

где $H(x)$ — вполне непрерывный недифференцируемый по Фреше оператор. Пусть существует линейный оператор A, такой, что в некоторой окрестности U точки x_0

$$\| H(x) - H(x_0) - A(x - x_0) \| \leqslant k \| x - x_0 \|$$

существует $(I - \lambda_0 A)^{-1}$ и

$$\| (I - \lambda_0 A)^{-1} \| \leqslant a, \quad |\lambda_0| ak < 1.$$

Тогда существуют шар $T(x_0, r)$ и интервал J: $(\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$, такие, что для всех $\lambda \in J$ уравнение $x = \lambda H(x)$ имеет в $T(x_0, r)$ единственное решение $x(\lambda)$, которое непрерывно зависит от параметра λ.

Для доказательства достаточно рассмотреть векторное поле

$$I - \lambda H = I - \lambda_0 H - (\lambda - \lambda_0) H$$

и положить

$$F(x) = \lambda_0 H(x), \quad G(x) = (\lambda - \lambda_0) H(x), \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0.$$

Непрерывность $x(\lambda)$ в λ_0 следует из замечания 3. Для любой другой точки $\lambda_1 \in J$ достаточно воспользоваться изолированностью $x_1 = x(\lambda_1)$ и взять за исходные в описанных рассуждениях λ_1 и x_1.

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М. : Гостехиздат, 1956.— 392 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 742 с.

Донец. ун-т

Получено 18.12.91